Licenciatura em
Engenharia de Telecomunicações e Informática

Matemática I

1ª Prova (Recurso)

14 de Fevereiro de 2025

Número: ________________ Nome: ____

Número de folhas entregues: __________

Notas:

- A prova tem a duração de 75 minutos. Não pode entregá-la antes de se completarem 30 minutos após o seu início;
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos necessários para obter os resultados;
- Não é permitida a utilização de calculadoras.

1. Considere a função $f(x) = k \arccos(2-3x) - \pi$, com $k \in \mathbb{R}$.
   a) Determine o domínio da função f;
   b) Determine, se possível, k de modo que o contradomínio da função f seja $[0, 3\pi]$;
   c) Determine a função inversa de f, f^{-1};
   d) Considere $k = 4$.
      i) Calcule $f\left(\frac{5}{6}\right) + 3f^{-1}(2\pi) - \operatorname{cosec}\left(\operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;
      ii) Determine a equação da recta tangente à curva representativa da função $y = f(x)$ no ponto de abcissa $x = \frac{1}{2}$;
      iii) Considere as funções $y = f(x)$ e $x = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2(\pi t)$. Aplicando o teorema da derivada da função composta calcule $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{1}{4}}$.

2. Calcule um valor aproximado para $\operatorname{arctg}(\sqrt{1,01})$.

3. Considere a curva definida pelas equações $\begin{cases} x = \operatorname{cosec}^2(t) \\ y = \ln(\operatorname{sen}(t)) \end{cases}$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\left.\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}(t) \cdot \frac{dx}{dy}\right)\right|_{t=-\frac{\pi}{4}}$.

4. Calcule
   a) $\displaystyle\int \frac{2 + x + \operatorname{arctg}^2(\sqrt{x+1})}{(2+x)\sqrt{x+1}}\, dx$
   b) $\displaystyle\int (1-x)\cos(1-x)\, dx$

5. Considere os integrais $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{e}}{2}} \frac{\ln(2x) + 4}{x(1 + \ln^2(4x^2))}\, dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4+t}{1+4t^2}\, dx$.
   a) Efectuando a substituição $2x = e^t$, mostre que $I_1 = I_2$;
   b) Calcule I_2.